MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDETEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ANDREI MUREȘANU” DEJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA” ediția a XXIII-a, mai 2026

REZOLVARE / BAREM de corectare

ORICE SOLUȚIE MATEMATIC CORECTĂ ESTE ACCEPTATĂ!!!

CLASA a VI-a

Problema 1.

Se consideră numerele naturale $a = 2n + 3, b = 5n + 7, c = 3n + 4, n \in \mathbb{N}$

a) Demonstrați că a și b sunt prime între ele.
b) Arătați că numărul $[a, b] + [b, c]$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n, unde $[x, y]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y.

Soluție
a) $(a, b) = 1$ 6p
b) $(b, c) = 1$ 6p
$[a, b] \cdot (a, b) = 1$ 3p
$[a, b] + [b, c] = a \cdot b + b \cdot c = b \cdot (a + c) = b^2$ 10p

total: 25p

Problema 2.

Să se arate că numărul $A = 2^{2025} + 3^{2026} + 4^{2027}$ **nu** este pătrat perfect.

Soluție

a) $u(2^{2025} + 3^{2026} + 4^{2027}) = \mathbf{5}$ 10 p

b) **Metoda 1**.

Ultimele două cifre ale unui pătrat perfect 2p

$00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96$

Determinăm ultimele două cifre ale numărului A.
Ultimele două cifre ale puterilor lui 2 se repetă din 20 în 20 1p
Ultimele două cifre ale puterilor lui 3 se repetă din 20 în 20 1p
Ultimele două cifre ale puterilor lui 4 se repetă din 10 în 10 1p
Atunci 2^{2025} are ultimele două cifre ca și 2^5, adică 32. 1p
3^{2026} are ultimele două cifre ca și 3^6, adică 29 1p

4^{2027} are ultimele două cifre ca și 4^7, adică84. 1p

Ultimele două cifre ale lui A sunt 45, deci nu este pătrat perfect. 2p

Metoda 2

Se arată că numărul A este divizibil cu 3 dar nu cu 9.

$3^{2026} \vdots 3$ și $3^{2026} \vdots 9$

$2^{2025} = (2^6)^{337} \cdot 2^3 = (63+1)^{337} \cdot 8 = M_3 + 2$ și $2^{2025} = M_9 + 8$

$4^{2027} = (4^3)^{675} \cdot 4^2 = (63+1)^{675} \cdot 16 = M_3 + 1$ și $4^{2027} = M_9 + 7$

Deci $A = M_3$ și $A = M_9 + 6$

total: 20 p

Problema 3.

Să se determine intersecția tuturor mulțimilor care sunt formate din cel puțin 4 numere naturale consecutive, care au suma elementelor egală cu 2023.

Soluție

Fie mulțimea $M = \{a, a+1, a+2, \dots, a+k-1\}$ cu k elemente,

$k \geq 4, a \in \mathbb{N}^*$ 3p

Atunci $a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+k-1) = 2023 \Leftrightarrow ka + \frac{(k-1)k}{2} =$

$2023 \Leftrightarrow k(2a+k-1) = 4046$ 5p

$D_{4046} = \{1,2,7,14,17,34,119,238,289,578,2023,4046\}$. 2p

Pentru $k = 7 \Rightarrow a = 286$ și $M_1 = \{286,287, \dots ,292\}$ 2p

Pentru $k = 14 \Rightarrow a = 138$ și $M_2 = \{138,139, \dots ,151\}$ 2p

Pentru $k = 17 \Rightarrow a = 111$ și $M_3 = \{111,112, \dots ,127\}$ 2p

Pentru $k = 34 \Rightarrow a = 43$ și $M_4 = \{43,44, \dots ,76\}$ 2p

Celelalte cazuri sunt imposibile, deci $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 = \emptyset$. 2p

total: 20 p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA”
ediția a XXIII-a, mai 2026

Problema 4.

Se consideră triunghiul ABC cu $AB \equiv BC$ și $\sphericalangle ABC = 80°$. Luăm punctul P în interiorul triunghiului astfel încât $\sphericalangle PAC = 40°$ iar $\sphericalangle ACP = 30°$. Să se afle măsura unghiului BPC.

Soluție

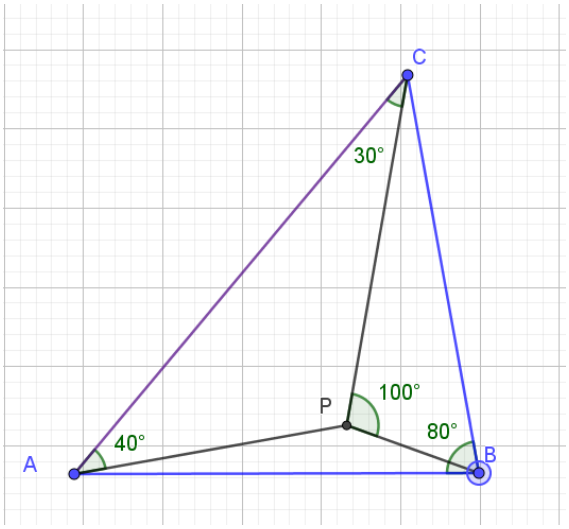


Figura 4p

$\sphericalangle A = \sphericalangle C = 50^0$ 3p

$\sphericalangle PCB = 20^0, \sphericalangle PAB = 10^0$, $\sphericalangle APC = 110^0$ 3p

Fie $BD \perp AC, D \in AC$ și $BD \cap CP = \{E\}$ 2p

ΔEAC isoscel, deci $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ECA = 30^0$, atunci $\sphericalangle EAP = 10^0$, adică AP bisectoarea $\sphericalangle EAB$ 3p

$\sphericalangle PEA = 60^0, \sphericalangle PEB = \sphericalangle CED = 60^0$, deci EP bisectoare $\sphericalangle BEA$ 3p

Rezultă BP bisectoare $\sphericalangle EBA$, deci $\sphericalangle PBE = 20^0$ 5p

Finalizare $\sphericalangle BPC = 100^0$ 2p

total: 25 p