MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDETEAN CLUJ
COLEGIUL NAȚIONAL „ANDREI MUREȘANU” DEJ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA” ediția a XXIII-a, mai 2026

REZOLVARE / BAREM de corectare

ORICE SOLUȚIE MATEMATIC CORECTĂ ESTE ACCEPTATĂ!!!

CLASA a V-a

Problema 1.

Fie numerele

$$a = (2^{2026} + 2^{2025} + 2^{2024}) : (2^{2021} + 2^{2020} + 2^{2019}) - 2^4 - 2^3 - 1 \text{ și}$$

$$b = [3^{2015} + (2^{67})^{30} : (2^{287})^7 - (3^{53})^{38} - 2 \cdot 3^{2014}]^{201}.$$

a)Studiați dacă numărul $7b + a^{2026}$este pătrat perfect.

b) Comparați numerele a^{67} și b.

Soluție

$a)$ $a = 7$ 5p

$b = 2^{201}$ 5p

$u(7b + a^{2026}) = 3$ 4p

finalizare 1p

b)

$b = 2^{201} = 8^{67} > a^{67}$ 10p

---

total: 25 p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA” ediția a XXIII-a, mai 2026

Problema 2.

Arătați că numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2026}\right)$este natural și se divide cu 2027

Soluție

$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2026}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 \cdot \frac{1}{3} + \cdots 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 \cdot \frac{1}{2026}$ 5p

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2026 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2025$, care este număr natural 5p

Grupând termenii extremi și cei egal depărtați de termenii extremi, obținem

$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2025(2026 + 1) + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2024 \cdot 2026(2025 + 2) + \cdots +$

$+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1012 \cdot 1015 \cdot \ldots \cdot 2026(1014 + 1013) \vdots 2027.$ 10p

total: 20 p

Problema 3.

a) Să se scrie numărul 2026 ca sumă a două pătrate perfecte.
b) Calculați: $36^2 + 24^2 + 12^2 + 3^2 + 1^2$.
c) Să se arate că numărul 2026 face parte dintr-un șir de 57 numere naturale consecutive, care au suma un pătrat perfect.

Soluție

a) $2026 = 45^2 + 1^2$. 5p
b) $36^2 + 24^2 + 12^2 + 3^2 + 1^2 = 2026$. 5p
c) Fie $x - 28, x - 27, \ldots, x, x + 1, x + 2, \ldots, x + 28$ cele 57 numere naturale $(x > 28, x \in \mathbb{N})$. 3p
Suma lor este $S = 57 \cdot x$ 2p
Pentru a fi pătrat perfect trebuie ca $x = 57 \cdot k^2, k \in \mathbb{N}^*$. 3p
Dar $2026 = 57 \cdot 36 - 26 = 57 \cdot 6^2 - 26$ 2p
Finalizare: 2026 face parte din șirul
$57 \cdot 6^2 - 28, 57 \cdot 6^2 - 27, 57 \cdot 6^2 - 26, \ldots, 57 \cdot 6^2 + 28$ 5p

total: 25 p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA” ediția a XXIII-a, mai 2026

Problema 4.

Să se afle ultimele două cifre ale numărului:

$$n = 7 \cdot 23 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot 1991 \cdot 2007 \cdot 2023$$

Soluție

Observăm că toți factorii produsului sunt de forma:

$16 \cdot x + 7, x \in \{0,1,2, \ldots ,126\}$ 5p

Printre factorii lui n se află și $16 \cdot 23 + 7 = 375$, deci $n \vdots 25$ 3p

Avem $16 \cdot x + 7 = 4 \cdot (4x + 1) + 3 = 4 \cdot k + 3,\ k \in \mathbb{N}^*$ 2p

Restul împărțirii lui n la 4 este egal cu restul împărțirii lui 3^{127} la 4. 3p

La împărțirea cu 4 , puterile lui 3 dau resturile 3 și 1 2p

Cum $n \vdots 25$ și dă restul 3 la împărțirea cu 4

$\Rightarrow$ultimele două cifre ale lui n sunt 75. 5p

total: 20 p